הפקולטה למתמטיקה, הטכניון
סמסטר אביב, תשס"ח

בוחן בחדו"א 1/מ (104010)

מורה אחראי: פרופ' יואב בנימיני

- משך הבוחן שעתיים.
- הניקוד: יש שמונה שאלות אמריקאיות. בחמש השאלות הראשונות יש לבחור תשובה אחת נכונה מבין חמש אפשרויות, ותשובה נכונה מזכה ב- 8 נקודות. בשלוש השאלות הנותרות יש לבחור תשובה אחת נכונה מבין שתי אפשרויות, ותשובה נכונה מזכה ב- 4 נקודות.

  יש 2 שאלות פתוחות. הניקוד מצויין ליד כל סעיף.
- סך הנקודות הוא 103 אך הציון המכסימלי הוא 100!
- אין להשתמש בשום חומר עזר (כולל מחשבון וטלפון סלולרי).
- יש למלא את כל הפרטים האישיים הן בטופס התשובות האמריקאיות, הן בטופס בתחילת החלק הפתוח, והן בראש כל דף של החלק הפתוח.
- יש להשתמש בעט שחור או כחול בלבד. אין להשתמש בעפרון!
- החלק האמריקאי:
  - לכל שאלה יש בדיוק תשובה נכונה אחת.
  - את התשובות לשאלות האמריקאיות יש לסמן בטופס המיועד לכך, ולהקפיד על מילוי הטופס עפ"י ההוראות.
  - יש להגיש רק את טופס התשובות, ולא את דפי השאלות.
  - יש 3 טורי בחינה שונים. מספר הטור של הבחינה שלך מופיע בראש דף השאלות האמריקאיות. יש להקפיד ולהעתיק את מספר הטור במקום המיועד לכך בטופס התשובות!
- החלק הפתוח:
  - יש למלא את הפרטים האישיים בטופס ובראש כל דף.
  - יש לתת פתרון מלא ומנומק, ולהקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת.

בהצלחה!

שאלות אמריקאיות

שימו לב שיש הבדל בסדר השאלות בין הטפסים השונים.

שאלה 1. הגבול $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \tan\left(\frac{(1-\frac{1}{n})^n}{n^2+2n+2}\right)$ הוא

א. e ב. e^{-1} ג. 0 ד. 1 ה. ∞

התשובה הנכונה היא ב.

נציג

$$n^2 \tan\left(\frac{(1-\frac{1}{n})^n}{n^2+2n+2}\right) = \frac{n^2}{n^2+2n+2} \cdot (1-\frac{1}{n})^n \cdot \frac{\tan\left(\frac{(1-\frac{1}{n})^n}{n^2+2n+2}\right)}{\left(\frac{(1-\frac{1}{n})^n}{n^2+2n+2}\right)}$$

ואז הגורם הראשון שואף ל- 1, השני ל- e^{-1}, והגורם השלישי שואף ל- 1 כי $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ ולכן $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

שאלה 2. תהי g פונקציה המוגדרת לכל x ומקיימת $g(x) > g(-x) > 0$ לכל $x > 0$. נגדיר פונקציה חדשה בקרן $[0,\infty)$ ע"י $f(x) = \frac{e^x g(x) - g(-x)}{e^x g(x) + g(-x)}$. אז הפונקציה f היא

א. חסומה מלעיל ולא חסומה מלרע בקרן.

ב. חסומה מלרע ולא חסומה מלעיל בקרן.

ג. חסומה מלעיל ומלרע בקרן, מקבלת שם מכסימום ואינה מקבלת מינימום.

ד. חסומה מלעיל ומלרע בקרן, ומקבלת שם גם מכסימום וגם מינימום.

ה. חסומה מלעיל ומלרע בקרן, מקבלת שם מינימום ואינה מקבלת מכסימום.

התשובה הנכונה היא ה.

לכל $x > 0$ התנאי נותן כי $e^x g(x) - g(-x) > (e^x - 1)g(-x) > 0$, ולכן $f(x) > 0$ ובודאי ש- $f(x) < 1$. לכן f חסומה מלעיל ומלרע בקרן, והיות ש- $f(0) = 0$, היא מקבלת בקרן מינימום. הסופרמום של f בקרן הוא 1, כי היא חסומה ע"י 1 ומקיימת כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ מכיון ש-

$$\frac{e^x g(x) - g(-x)}{e^x g(x) + g(-x)} > \frac{(e^x - 1)g(x)}{(e^x + 1)g(x)} = \frac{(e^x - 1)}{(e^x + 1)} \to 1$$

אך הערך 1 איננו מתקבל בקרן, ולכן היא אינה מקבלת מכסימום שם.

<u>שאלה 3.</u> נסמן

$$A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{5^n + 6^n} \quad ; \quad B = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+j^2}}$$

אז

א. A ו- B סופיים, ו- $A < B$.

ב. A ו- B סופיים, ו- $A > B$.

ג. A ו- B סופיים, ו- $A = B$.

ד. A סופי ו- $B = \infty$.

ה. B סופי ו- $A = \infty$.

<u>התשובה הנכונה היא ג.</u>

לחישוב A נשתמש בכך ש- $a^{1/n} \to 1$ לכל $a > 0$. לכן $\sqrt[n^2]{5^n + 6^n} \geq \sqrt[n^2]{6^n} = 6^{1/n} \to 1$ ומצד שני $\sqrt[n^2]{5^n + 6^n} \leq \sqrt[n^2]{2 \cdot 6^n} = 2^{1/n^2} 6^{1/n} \to 1$, ולכן עפ"י משפט הסנדוויץ' $A = 1$.

לחישוב B נשים לב כי $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+j^2}} < n\frac{1}{\sqrt[3]{n^3}} = 1$. כמו כן הסדרה $\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+j^2}}$ מונוטונית יורדת, ולכן $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+j^2}} > n\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+n^{-1}}} \to 1$. עפ"י משפט הסנדוויץ' גם $B = 1$.

<u>שאלה 4.</u> תהי

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\ln x)}{\ln x} & 0 < x < 1 \\ e^{\frac{1}{x^2-1}} & 1 < x < 2 \\ \left(1 - \frac{(2-x)^2}{3}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}} & x > 2 \end{cases} .$$

אז

א. לפונקציה יש אי רציפות סליקה בנקודה 1.

ב. לפונקציה יש אי רציפות מסוג קפיצה בנקודה 1.

ג. לפונקציה יש אי רציפות סליקה בנקודה 2.

ד. לפונקציה יש אי רציפות מסוג קפיצה בנקודה 2.

ה. לפונקציה יש אי רציפות עיקרית (מהותית) בנקודה 2.

<u>התשובה הנכונה היא ד.</u>

$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = \infty$ ולכן גם $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$ ול-f אי רציפות עיקרית ב- $x = 1$.

חישוב ישיר מראה כי $\lim_{x\to 2^-} f(x) = e^{1/3}$. לחישוב הגבול מימין נשתמש בכך שלכל מספר קבוע λ מתקיים $\lim_{x\to 0}(1+\lambda t)^{1/t} = e^{\lambda}$. ניקח $\lambda = -1/3$ ו- $t = (2-x)^2$ ונקבל כי $\lim_{x\to 2^+} f(x) = e^{-1/3} \neq e^{1/3}$, ולכן יש ל- f קפיצה ב- $x = 2$.

<u>שאלה 5.</u> תהי a_n הסדרה

$$a_n = \begin{cases} \frac{k^2+k}{k^2+1} + (-1)^{k+1}e^{-k} & n = 2k \text{ זוגי מהצורה } n \\ \\ (-1)^{k+1}\frac{k^2+k}{k^2+1} + e^{-k} & n = 2k+1 \text{ איזוגי מהצורה } n \end{cases}.$$

אז

א. הסדרה מתכנסת.

ב. לסדרה יש בדיוק שלושה גבולות חלקיים שונים זה מזה.

ג. לסדרה יש אינסוף גבולות חלקיים שונים זה מזה.

ד. $\sup\{a_n\} = 1$ (חסם עליון).

ה. $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ (גבול עליון).

<u>התשובה הנכונה היא ה.</u>

$\lim_{k\to\infty} \frac{k^2+k}{k^2+1} = 1$ ו- $\lim_{k\to\infty} e^{-k} = 0$, ולכן $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ ול- n-ים איזוגיים יש שני גבולות חלקיים: הגבול של a_{2k+1} כאשר ה- k-ים זוגיים הוא -1, וכשה- k-ים איזוגיים הוא 1.

לכן יש לסדרה בדיוק שני גבולות חלקיים ± 1, והגדול שבהם הוא $\limsup a_n = 1$. היות שכבר $a_1 = 1 + e^{-1} > 1$, נקבל כי בוודאי ש- $\sup a_n > 1$.

שאלות נכון/ לא נכון

<u>שאלה 6.</u> אם $\lim_{x\to 0} f(1+x^2) = L$ קיים וסופי, אז גם $\lim_{x\to 1} f(x)$ קיים, וגם ערכו הוא L.

א. נכון ב. לא נכון

<u>לא נכון.</u>
ניקח $f(x) = [x]$, ואז אין לה גבול ב- $x = 1$, אך $1 + x^2 \geq 1$ לכל x, ולכן $L = 1$.

<u>שאלה 7.</u> אם f זוגית ו- g איזוגית אז ההרכבה $f \circ g$ היא זוגית.

א. נכון ב. לא נכון

<u>נכון.</u>
$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x) = (f \circ g)(x)$

<u>שאלה 8.</u> אם $b_n \neq 0$ לכל n ואם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$, אז לכל $\varepsilon > 0$ יש N כך ש- $|a_n - 2b_n| < \varepsilon$ לכל $n > N$.

א. נכון ב. לא נכון

לא נכון.
ניקח למשל $a_n = 2n + 1$ ו- $b_n = n$.

שאלות פתוחות

<u>שאלה 1.</u> הגדרות
(5%) א. הגדירו במדוייק: הסדרה $\{a_n\}$ איננה חסומה מלעיל.

<u>תשובה</u>
לכל מספר M יש n כך ש- $a_n > M$.

(5%) ב. הגדירו במדוייק: המספר M הוא החסם העליון של הפונקציה f בקטע $[a,b]$.

<u>תשובה</u>

M הוא חסם מלעיל של הפונקציה, כלומר $f(x) \leq M$ לכל x בקטע, והוא החסם המלעיל הקטן ביותר, כלומר, לכל $L < M$ יש x בקטע כך ש- $f(x) > L$.

(5%) ג. הגדירו במדוייק: לפונקציה f יש גבול משמאל בנקודה $x = \alpha$.

<u>תשובה</u>

יש מספר L (הגבול) כך שלכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שאם $a - \delta < x < a$ אז $|f(x) - L| < \varepsilon$.

<u>שאלה 2.</u>

(18%) הוכיחו עפ"י ההגדרה (בלשון ε ו- δ) כי $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+2} = 1$.

<u>תשובה</u>

נציג

$$\frac{x^2+x+1}{x+2} - 1 = \frac{x^2+x+1-(x+2)}{x+2} = \frac{x^2-1}{x+2} = (x-1)\frac{x+1}{x+2}$$

ונשים לב שאם $|x-1| < \frac{1}{2}$, כלומר, אם $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$, אז

$$0 < \frac{x+1}{x+2} < \frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{1}{2}+2} = 1 \qquad (*)$$

נקבע כעת $\varepsilon > 0$ ונבחר $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \varepsilon\}$, ואז, אם $|x-1| < \delta$ מתקיים $(*)$, ולכן

$$\left|\frac{x^2+x+1}{x+2} - 1\right| = |x-1|\,\frac{x+1}{x+2} < |x-1| < \delta \leq \varepsilon \quad .$$

<u>שאלה 3.</u>

(18%) הוכיחו שאם f מונוטנית עולה וחסומה בקטע (a,b), אז הגבול משמאל $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ קיים (וסופי!).

<u>תשובה</u>

ראו ברשימות.